УДК 517.983.23

А.В. ГЛУШАК

A.V. GLUSHAK

**КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ**

**ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ**

**ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ**

**CRITERION FOR UNIQUENESS OF SOLUTION**

**OF BOUNDARY PROBLEMS  
FOR ABSTRACT DEGENERATE EQUATIONS**

*Для абстрактных вырождающихся уравнений на конечном интервале рассматриваются граничные задачи с условиями Дирихле и Неймана. Устанавливается критерий единственности решения.*

*Ключевые слова: вырождающееся уравнение, граничные задачи, критерий единственности.*

*For abstract degenerate equations on a finite interval, boundary-value problems with the Dirichlet and Neumann conditions are considered. A criterion for the uniqueness of a solution is established.*

*Keywords: degenerate equation, boundary value problems, uniqueness criterion.*

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории дифференциальных уравнений и давно привлекают внимание широкого круга исследователей (см. [1 – 3] и имеющуюся в них библиографию). Отдельные виды таких уравнений подробно и глубоко изучены. Однако для уравнений второго порядка вырождающихся в уравнение первого порядка некоторые вопросы, в частности, случай операторных коэффициентов (абстрактные уравнения в банаховом пространстве) и критерий единственности граничных задач, требуют дальнейшего исследования.

Пусть *E* – комплексное банахово пространство и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*, область определения которого не обязательно плотна в *E*.

Мы будем изучать граничные задачи на конечном интервале .

Постановка граничных условий для вырождающегося уравнения

(1)

в точке вырождения зависит от коэффициентов *b* и уравнения и эти условия будут приведены далее.

Граничные условия в точке для всех рассматриваемых случаев изменения указанных коэффициентов одинаковы и имеют вид

(2)

где – действительные числа,

Поскольку на оператор *A* наложены весьма общие условия, то в этой работе вопросов разрешимости граничных задач мы, естественно, не касаемся.

**1. Слабо вырождающееся дифференциальное уравнение**

**со степенным характером вырождения**

Пусть , . Значение параметра и означает слабое вырождение,в отличие от случая сильного вырождения , который далее также будет рассмотрен в работе. При получается уравнение Эйлера, которое, как известно, сводится к невырождающемуся уравнению.

Постановка граничных условий в точке вырождения зависит от коэффициента *b*. При рассмотрим задачу определения функции , принадлежащей при , удовлетворяющей уравнению (1), условию (2), а также граничному условию Дирихле

(3)

Введем следующие обозначения:

где – гамма-функция Эйлера, – модифицированная функция Бесселя.

Функцию называют нормированной функцией Бесселя и используют также обозначение .

Сформулируем теперь критерий единственности решения граничной задачи (1) – (3).

**Теорема 1.** Пусть , и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1) – (3) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Нули функции при удобно определять равенством , где – корни уравнения

(4)

а – функция Бесселя первого рода.

Например, если , то уравнение (4), и соответственно принимают вид

, , .

Таким образом, чтобы решить вопрос о единственности решения рассматриваемой граничной задачи, следует определить собственные значения оператора *A* и выяснить их принадлежность множеству нулей функции . Многочисленные примеры нахождения собственных значений для дифференциальных операторов *A*, действующих по пространственным переменным можно найти, например, в гл. 2 [4], и в каждом конкретном случае их следует сравнить с нулями функции .

Мы рассмотрим пример действующего по пространственной переменной *x* сингулярного оператора *A*.

Для заданного на множестве функций

дифференциального оператора Бесселя , где

единственность решения рассматриваемых граничных задач для гиперболического уравнения сводится к исследованию расположения нулей функции , которые являются собственными значениями оператора , и нулей функции

В частности, при предстоит исследовать расположения нулей функций и , . В зависимости от параметров и , указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на ,поэтому единственность решения граничных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулейфункций Бесселя см., например, п.2 работы [5]. Отметим также, что важную роль при исследовании единственностииграют и промежутки изменения переменных и , поскольку при этомнули каждой из функций Бесселя меняют свое положение. Аналогичные факты при решении задачи Дирихле для гиперболическихуравнений в частных производных установлены ранее в [6].

В случаях или , где *i* – мнимая единица, собственные значения оператора *A* лежат либо на ,либо на мнимой оси и не попадают на , поэтому соответствующие граничные задачи имеют единственное решение.

Пусть теперь в уравнении (1) коэффициент. В этом случае вместо условия (3) зададим весовое условие Неймана

(5)

и тогда справедлив следующий критерий единственности.

**Теорема 2**. Пусть , и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1), (2), (5) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Для значений параметра *b*, удовлетворяющих неравенству

одновременно справедливы и теорема 1 с условием Дирихле при , и теорема 2 с весовым условием Неймана при .

**2. Сильно вырождающееся дифференциальное уравнение**

**со степенным характером вырождения**

В случае сильного вырождения постановка граничных условий в точке вырождения также зависит от коэффициента *b*. Введём обозначения:

.

**Теорема 3.** Пусть , и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1) – (3) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

**Теорема 4**. Пусть , и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1), (2), (5) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Для значений параметра *b*, удовлетворяющих неравенству

одновременно справедливы и теорема 3 с условием Дирихле при , и теорема 4 с весовым условием Неймана при

**3. Абстрактный аналог вырождающегося по пространственной переменной дифференциального уравнения со степенным характером вырождения**

При рассмотрим уравнение

(6)

и, наряду с условием (2), зададим условие Неймана в точке

(7)

Если *A* – оператор дифференцирования по пространственной переменной *x*, например, , то уравнение (6) является вырождающимся гиперболическим, обобщающим уравнение Трикоми, но имеет другой характер вырождения по сравнению с уравнениями предыдущих пунктов. Поэтому абстрактное уравнение (6) естественно также называть вырождающимся. Введём обозначения:

**Теорема 5**. Пусть и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (2), (6), (7) имеет решение . Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль функции

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения – М.: Наука. 1966.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа – М.: Наука. 1970.

3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой – МГУ. Москва. 2010.

4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике – Учеб. пособие. М. Изд-во МГУ. 1998.

5. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления – Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014 – Т. 54, № 9 – С. 1387 – 1441.

6. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков – Матем. заметки – 2015 – Т. 97, №2 – С. 262 – 276.

**Глушак Александр Васильевич**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

г. Белгород.

Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного

моделирования.

E-mail: glushak@bsu.edu.ru