УДК 517.983.23

А.В. ГЛУШАК

A.V. GLUSHAK

**КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ**

**ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ**

**ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ**

**CRITERION FOR UNIQUENESS OF SOLUTION**

**OF BOUNDARY PROBLEMS
FOR ABSTRACT DEGENERATE EQUATIONS**

*Для абстрактных вырождающихся уравнений на конечном интервале рассматриваются граничные задачи с условиями Дирихле и Неймана. Устанавливается критерий единственности решения.*

*Ключевые слова: вырождающееся уравнение, граничные задачи, критерий единственности.*

*For abstract degenerate equations on a finite interval, boundary-value problems with the Dirichlet and Neumann conditions are considered. A criterion for the uniqueness of a solution is established.*

*Keywords: degenerate equation, boundary value problems, uniqueness criterion.*

Дифференциальные уравнения с обращающимся в нуль коэффициентом при старшей производной не вписываются в рамки стандартной теории дифференциальных уравнений и давно привлекают внимание широкого круга исследователей (см. [1 – 3] и имеющуюся в них библиографию). Отдельные виды таких уравнений подробно и глубоко изучены. Однако для уравнений второго порядка вырождающихся в уравнение первого порядка некоторые вопросы, в частности, случай операторных коэффициентов (абстрактные уравнения в банаховом пространстве) и критерий единственности граничных задач, требуют дальнейшего исследования.

Пусть *E* – комплексное банахово пространство и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*, область определения $D\left(A\right)$ которого не обязательно плотна в *E*.

Мы будем изучать граничные задачи на конечном интервале $0<t<T$.

Постановка граничных условий для вырождающегося уравнения

$t^{γ}u^{''}\left(t\right)+bt^{γ-1}u^{'}\left(t\right)=Au\left(t\right), 0<t<T $ (1)

в точке вырождения $t=0$ зависит от коэффициентов *b* и $γ>0$ уравнения и эти условия будут приведены далее.

Граничные условия в точке $t=T$ для всех рассматриваемых случаев изменения указанных коэффициентов одинаковы и имеют вид

$αu\left(T\right)+βu^{'}\left(T\right)=u\_{1}, u\_{1}\in E,$(2)

где $α, β$ – действительные числа, $α^{2}+β^{2}>0.$

Поскольку на оператор *A* наложены весьма общие условия, то в этой работе вопросов разрешимости граничных задач мы, естественно, не касаемся.

**1. Слабо вырождающееся дифференциальное уравнение**

**со степенным характером вырождения**

Пусть $0<γ<2$, $b\in R$. Значение параметра $0<γ<2$ и означает слабое вырождение,в отличие от случая сильного вырождения $γ>2$, который далее также будет рассмотрен в работе. При $γ=2$ получается уравнение Эйлера, которое, как известно, сводится к невырождающемуся уравнению.

Постановка граничных условий в точке вырождения$ t=0$ зависит от коэффициента *b*. При $b<1$ рассмотрим задачу определения функции $u\left(t\right)\in C\left(\left[0,T\right],E\right)∩C^{2}\left((0,T],E\right)$, принадлежащей $D\left(A\right)$ при $t\in (0,T)$, удовлетворяющей уравнению (1), условию (2), а также граничному условию Дирихле

$u\left(0\right)=u\_{0}, u\_{0}\in E.$(3)

Введем следующие обозначения:

$$k=bν-ν+1, ν=\frac{2}{2-γ}, l=νT^{1/ν},$$

$$ Y\_{2-k}\left(t,λ\right)=Γ\left(\frac{3-k}{2}\right)\left(\frac{t\sqrt{λ}}{2}\right)^{k/2-1/2}I\_{1/2-k/2}\left(t\sqrt{λ}\right),$$

где $Γ\left(⋅\right)$ – гамма-функция Эйлера, $I\_{p}\left(⋅\right)$ – модифицированная функция Бесселя.

Функцию $Y\_{2-k}\left(t,λ\right)$ называют нормированной функцией Бесселя и используют также обозначение $j\_{1/2-k/2}\left(t\sqrt{λ}\right)$.

Сформулируем теперь критерий единственности решения граничной задачи (1) – (3).

**Теорема 1.** Пусть $0<γ<2$, $b<1$ и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1) – (3) имеет решение $u\left(t\right)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $λ\_{m}, m\in N $функции

$$Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)=\left(α+β\left(1-k\right)T^{-γ/2}\right)Y\_{2-k}\left(l,λ\right)+βT^{-γ/2}Y\_{2-k}^{'}\left(l,λ\right)$$

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Нули функции $Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)$ при $b<1$ удобно определять равенством $λ\_{m}=-μ\_{m}^{2}$, где $μ\_{m}$ – корни уравнения

$μ^{k/2-1/2}\left(\left(2α+β\left(1-k\right)T^{-γ/2}\right)J\_{1/2-k/2}\left(lμ\right)+2βT^{-γ/2}μJ\_{1/2-k/2}^{'}\left(lμ\right)\right)=0,$ (4)

а $J\_{p}\left(⋅\right)$ – функция Бесселя первого рода.

Например, если $β=0, b=\frac{γ}{2}$, то уравнение (4), $μ\_{m}$ и $λ\_{m}$ соответственно принимают вид

$\frac{\sin(μ)}{μ}=0$, $μ\_{m}= \frac{πm}{l}$, $λ\_{m}=-\left(\frac{πm}{l}\right)^{2}, m\in N$.

Таким образом, чтобы решить вопрос о единственности решения рассматриваемой граничной задачи, следует определить собственные значения оператора *A* и выяснить их принадлежность множеству нулей функции $Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)$. Многочисленные примеры нахождения собственных значений для дифференциальных операторов *A*, действующих по пространственным переменным можно найти, например, в гл. 2 [4], и в каждом конкретном случае их следует сравнить с нулями функции $Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)$.

Мы рассмотрим пример действующего по пространственной переменной *x* сингулярного оператора *A*.

Для заданного на множестве функций

$$D\left(A\right)=H^{2}\left(0,1\right)∩H\_{0}^{1}\left(0,1\right), E=L\_{2}(0,1)$$

дифференциального оператора Бесселя $A=B\_{q,x}$, где

$$B\_{q,x}=\frac{d^{2}}{dx^{2}}+\frac{q}{x}\frac{d}{dx}, q>0,$$

единственность решения рассматриваемых граничных задач для гиперболического уравнения сводится к исследованию расположения нулей функции $I\_{q/2-1/2}\left(\sqrt{z}\right)$, которые являются собственными значениями оператора $B\_{q,x}$, и нулей функции $Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right).$

В частности, при $β=0, b<1, T=1$ предстоит исследовать расположения нулей функций $ I\_{q/2-1/2}\left(\sqrt{z}\right)$ и $I\_{1/2-k/2}\left(\sqrt{λ}\right)$, $k=bν-ν+1, ν=\frac{2}{2-γ}$. В зависимости от параметров $k$ и $q$, указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на $\left(-\infty ,0\right)$,поэтому единственность решения граничных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулейфункций Бесселя см., например, п.2 работы [5]. Отметим также, что важную роль при исследовании единственностииграют и промежутки изменения переменных $0<t<T$ и $0<x<d$, поскольку при этомнули каждой из функций Бесселя меняют свое положение. Аналогичные факты при решении задачи Дирихле для гиперболическихуравнений в частных производных установлены ранее в [6].

В случаях $ A=-B\_{q,x}$ или $A=iB\_{q,x}$, где *i* – мнимая единица, собственные значения оператора *A* лежат либо на $\left(0,+\infty \right)$,либо на мнимой оси и не попадают на $\left(-\infty ,0\right)$, поэтому соответствующие граничные задачи имеют единственное решение.

Пусть теперь в уравнении (1) коэффициент$ b>\frac{γ}{2}$. В этом случае вместо условия (3) зададим весовое условие Неймана

$\lim\_{t\to +0}t^{b}u^{'}\left(t\right)=u\_{2}, u\_{2}\in E,$ (5)

и тогда справедлив следующий критерий единственности.

**Теорема 2**. Пусть $0<γ<2$, $b>\frac{γ}{2}$ и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1), (2), (5) имеет решение $u\left(t\right)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $λ\_{m}, m\in N $функции

$$Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)=αY\_{k}\left(l,λ\right)+βT^{-γ/2}Y\_{k}^{'}\left(l,λ\right)$$

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Для значений параметра *b*, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{γ}{2}<b<1$$

одновременно справедливы и теорема 1 с условием Дирихле при $t=0$, и теорема 2 с весовым условием Неймана при $t=0$.

**2. Сильно вырождающееся дифференциальное уравнение**

**со степенным характером вырождения**

В случае сильного вырождения постановка граничных условий в точке вырождения $t=0$ также зависит от коэффициента *b*. Введём обозначения:

$p=1+\frac{2(b-1)}{γ-2}, l=\frac{2}{γ-2}T^{γ/2-1}$.

**Теорема 3.** Пусть $γ>2$, $b<1$ и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1) – (3) имеет решение $u\left(t\right)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $λ\_{m}, m\in N $функции

$$Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)=\left(α+β\left(1-p\right)T^{γ/2-2}\right)Y\_{2-p}\left(l,λ\right)+βT^{γ/2-2}Y\_{2-p}^{'}\left(l,λ\right)$$

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

**Теорема 4**. Пусть $γ>2$, $b>2-\frac{γ}{2}$ и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (1), (2), (5) имеет решение $u\left(t\right)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $λ\_{m}, m\in N $функции

$$Υ\_{b,T}^{α,β,γ}\left(λ\right)=αY\_{p}\left(l,λ\right)+βT^{γ/2-2}Y\_{p}^{'}\left(l,λ\right)$$

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Для значений параметра *b*, удовлетворяющих неравенству

$$2-\frac{γ}{2}<b<1,$$

одновременно справедливы и теорема 3 с условием Дирихле при $t=0$, и теорема 4 с весовым условием Неймана при $t=0.$

**3. Абстрактный аналог вырождающегося по пространственной переменной дифференциального уравнения со степенным характером вырождения**

При $ω>0$ рассмотрим уравнение

$u^{''}\left(t\right)=t^{ω}Au\left(t\right), 0<t<T $ (6)

и, наряду с условием (2), зададим условие Неймана в точке $t=0$

$\lim\_{t\to +0}u^{'}\left(t\right)=u\_{2}, u\_{2}\in E.$ (7)

Если *A* – оператор дифференцирования по пространственной переменной *x*, например, $Au\left(t,x\right)=u\_{xx}^{''}\left(t,x\right)$, то уравнение (6) является вырождающимся гиперболическим, обобщающим уравнение Трикоми, но имеет другой характер вырождения по сравнению с уравнениями предыдущих пунктов. Поэтому абстрактное уравнение (6) естественно также называть вырождающимся. Введём обозначения:

$$q=\frac{ω+4}{ω+2}>1, l=\frac{2}{ω+2}T^{ω/2+1}.$$

**Теорема 5**. Пусть $ω>0$ и *A* – линейный замкнутый оператор в *E*. Предположим, что граничная задача (2), (6), (7) имеет решение $u\left(t\right)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $λ\_{m}, m\in N $функции

$$Υ\_{ω,T}^{α,β}\left(λ\right)=αY\_{q}\left(l,λ\right)+βT^{ω/2}Y\_{q}^{'}\left(l,λ\right)$$

не являлся бы собственным значением оператора *A*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00732).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения – М.: Наука. 1966.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа – М.: Наука. 1970.

3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой – МГУ. Москва. 2010.

4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике – Учеб. пособие. М. Изд-во МГУ. 1998.

5. Керимов М.К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления – Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014 – Т. 54, № 9 – С. 1387 – 1441.

6. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков – Матем. заметки – 2015 – Т. 97, №2 – С. 262 – 276.

**Глушак Александр Васильевич**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

г. Белгород.

Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного

моделирования.

E-mail: glushak@bsu.edu.ru